4 ЛЕКЦИЯ

Гамильтон функциясы, физикалық мағынасы. Гамильтонның ең аз әсер принципінен оның канондық теңдеулер жүйесін қорытып шығару

Лагранж функциясынан жылдамдық бойынша дербес туынды алатын болсақ, қозғалыс мөлшерінің шамасы шығады:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2\right) = m\dot{x} = P_x \tag{1}$$

Лагранждың теңдеуі координатаға тәуелді екінші ретті дифференциалды теңдеу болса, Гамильтон теңдеулері импульспен координатаға тәуелді бірінші дәрежелі дифференциалды теңдеулер жүйесі болып табылады. Берілген нүктенің орнын анықтайтын – геометриялық және қозғалыстың күйін сипаттайтын – динамикалық болып айнымалының екі түрінен жасалған энергияның негізгі функциясы болып табылатын механиканың есебін Гамильтон шешті. Ал енді, осы механиканың Гамильтон формасындағы есебін шешіп көрейік. Кинетикалық потенциалдың орнына Гамильтон негізгі функция ретінде толық энергияны алады.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{2}$$

Ал, координата ретінде P_i, q_i – айнымалыларын алады

$$\begin{cases} P_x = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \dot{x} = \dfrac{P_x}{m}, \\ P_y = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \dot{y} = \dfrac{P_y}{m}, \\ P_z = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \dot{z} = \dfrac{P_z}{m}. \end{cases} \tag{3}$$

Гамильтон функциясы кинетикалық энергия мен потенциалдық энергияның қосындысына тең

$$E = H\left(P_i, q_i\right) = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + U\left(x, y, z\right). \tag{4}$$

Гамильтон функциясының полярлы координатада жазылуы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right). \tag{5}$$

Импульстің P_r және $P_{\varphi r}$ проекцияларын табамыз:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \tag{6}$$

Кинетикалық энергияны p_r және p_φ импульс арқылы жазсақ

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{P_r^2}{m^2} + r^2\frac{P_\varphi^2}{m^2 r^4}\right) = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}\right). \tag{7}$$

Сонымен, полярлы координата жүйесінде Гамильтон функциясының түрі:

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}\right) + U(r,\varphi). \tag{8}$$

Гамильтон функциясы мен Лагранж функциясының айырымы неге тең, соны жазып көрсек,

$$\begin{aligned} L &= T - U, \\ H &= T + U. \end{aligned} \tag{9}$$

болатынын ескерсек

$$\begin{cases} L + H = 2T \\ H - L = 2U \end{cases} \tag{10}$$

Біртекті функцияларға арналған Эйлер теоремасын еске түсірелік

$$2T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{11}$$

анықтама бойынша $P_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, сондықтан

$$2T = \sum_i P_i \dot{q}_i \tag{12}$$

(10)-ды (12)-ге қойып

$$L + H = \sum_i P_i \dot{q}_i \tag{13}$$

немесе

$$L = \sum_i P_i \dot{q}_i - H \qquad (14)$$

Лагранж функциясының (14) түрін пайдаланып әсер функциясы – W Гамильтон функциясы арқылы жазамыз:

$$S = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_i P_i \, \dot{q}_i - H \right) dt \qquad (15)$$

Әсер функциясы – S ның жаңа түрін пайдаланып, ең аз әсер принципіне арналған жаңа өрнекті аламыз:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t} \left(\sum_i P_i \, \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_0}^{t} \left(\delta \sum_i P_i \, \dot{q}_i - \delta H \right) dt \qquad (16)$$

Бұл функция $P_i, q_i, \dot{q}_i$ – айнымалыларынан тәуелді болғандықтан, оны осы мәндер бойынша вариациялаймыз

$$\delta H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \qquad (17)$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \sum_i \left(P_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta P_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \right) dt \qquad (18)$$

Жылдамдықтың вариациясын да өрнектей аламыз болады:

$$\int_{t_0}^{t} P_i \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t} P_i \delta \frac{dq_i}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} P_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt \qquad (19)$$

(19) – интегралдаймыз

$$\int_{t_0}^{t} P_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = P_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{dP_i}{dt} \delta q_i dt = - \int_{t_0}^{t} \frac{dP_i}{dt} \delta q_i dt \qquad (20)$$

(20) –ны (18)-ге қойып

$$\int_{t_0}^{t} \sum_i \left(P_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta P_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_i \left[\left(-\frac{dP_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial P_i} \right) \delta P_i \right] dt = 0 \qquad (21)$$

Механиканың ең аз әсер принципі орындалу үшін мына жақшаның ішіндегі айырмалар нөлге тең болу керек:

$$-\frac{dP_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0,$$

$$\frac{dq_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial P_i}=0. \qquad (22)$$

немесе

$$\frac{dP_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial P_i}. \qquad (23)$$

Сонымен (22)–механиканың канондық теңдеулері немесе *Гамильтон теңдеулері* деп аталады.

Егер Гамильтон функциясы қандай да бір координатаға тәуелді болмаса, мысалы q_i-ге байланысты болмаса, $-\frac{\partial H}{\partial q_i}=0=\frac{dP_i}{dt}$ болады. Яғни, сәйкес жалпылама импульс құраушысы тұрақты болады. Мұндай координаталар *циклдық координаталар* деп аталады.

Ал, Гамильтонның физикалық артықшылығы оның Лагранж теңдеулерімен салыстырғанда жүйенің динамикасын сипаттауға ыңғайлы тәсілді ұсынғанында. Атап айтқанда, Гамильтон теңдеулері Лагранж теңдеулерінде қолданылатын жалпыланған координаттар мен жылдамдықтарға қарағанда экспериментте оңай өлшенетін және басқарылатын күй айнымалыларын (координаталар мен импульсты) пайдалануға мүмкіндік береді.

Гамильтонның ең аз әсер принципі Лагранждың ең аз ісер принципін жалпылау болып табылады және жүйенің берілген соңғы күйге жету үшін фазалық кеңістікте өтетін жолын сипаттайды. Бұл принципті Гамильтон теңдеулерін шығару және жүйенің Гамильтон функциясын анықтау үшін пайдалануға болады.

Гамильтон жасаған канондық теңдеулер жүйесінің қорытындылары уақыт бойынша координаталар мен моменттердің өзгеруі тұрғысынан жүйенің динамикасын сипаттауға мүмкіндік береді. Бұл теңдеулер жүйе туралы толық ақпарат береді және динамикалық процестердің сапалық және сандық сипаттамаларын алу үшін пайдаланылуы мүмкін.

Жалпы, Гамильтондық формализм теориялық физика мен механикада маңызды құрал болып табылады. Ол физикалық жүйелердің динамикасын сипаттауға ыңғайлы және интуитивті тәсілді қамтамасыз етеді және молекулалардан бастап ғарыштық объектілерге дейінгі кең ауқымды құбылыстарды зерттеу үшін пайдаланылуы мүмкін.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. *Гамильтон функциясының қисықсызықты координаттарда жазылуы.*
2. *Біртекті функцияларға арналған Эйлер теоремасы.*

3. Әсер функционалы.

4. Циклдық координаталар дегеніміз не?

5. Гамильтон функциясы дегеніміз не және оның Лагранж теңдеулерімен байланысы қандай?

6. Гамильтондық формализмнің лагранждық формализмнен қандай артықшылығы бар?

7. Гамильтонның ең аз әрекет принципі Гамильтон-Якоби теңдеулерімен қалай байланысты?

8. Лагранж теңдеулерінен канондық теңдеулер жүйесін шығарудың негізгі қадамдары қандай?

9. Канондық теңдеулер жүйесінің ерекшеліктері қандай және оның Гамильтон-Якоби теңдеулерімен байланысы қандай?

10. Гамильтондық формализмнің физикада практикалық қолданылуын көрсететін қандай мысалдар келтіруге болады?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5